

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală

Clasa a XI - a

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

1. Nu se acorda puncte din oficiu.
2. Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acorda punctajul corespunzător.
3. Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.

1.

$$x_n = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) = \ln(x_{n+1}) - \ln(x_n) \dots\dots\dots (2p)$$

$$\ln(e^{x_n}) + \ln(x_n) = \ln(x_{n+1}) \text{ deci } \ln(x_{n+1}) = \ln(e^{x_n} \cdot x_n) \dots\dots\dots (1p)$$

$$\text{Obținem } x_{n+1} = e^{x_n} \cdot x_n, \frac{x_{n+1}}{x_n} = e^{x_n} \text{ deci șirul } (x_n) \text{ este crescător} \dots\dots\dots (1p)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = +\infty. \dots\dots\dots (1p)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{x_n})^{\frac{1}{x_n}} = e. \dots\dots\dots (2p)$$

2.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \dots\dots\dots (1p)$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3.$$

$$\text{Rezultă că } A^n = O_3, \text{ pentru orice } n \geq 3. \dots\dots\dots (1p)$$

$$2A + 3A^2 + 4A^3 + \dots + 2025A^{2024} = 2A + 3A^2 =$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \dots\dots\dots (1p)$$

$$(I_3 + A)^n = C_n^0 I_3^n + C_n^1 I_3^{n-1} A + C_n^2 I_3^{n-2} A^2 + \dots + C_n^n A^n \dots\dots\dots (2p)$$

$$\text{Din } A^n = O_3, \text{ pentru orice } n \geq 3 \text{ rezultă } (I_3 + A)^n = C_n^0 I_3^n + C_n^1 I_3^{n-1} A + C_n^2 I_3^{n-2} A^2 \dots (1p)$$

$$\text{Se obține } (I_3 + A)^n = I_3 + nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \dots\dots\dots (1p)$$

3. a)

$$x_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \dots\dots\dots (1p)$$

$$x_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cdot \cos^2 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1 - \cos x(1 - \sin^2 2x)]}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) + \cos x \cdot \sin^2 2x}{x^2} = x_1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \sin^2 2x}{x^2}$$

$$\text{Obținem } x_2 = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2} \dots\dots\dots (2p)$$

b)

$$x_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x \cdot \cos^2 2x \cdot \dots \cdot \cos^n nx)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1 - \cos x \cdot \cos^2 2x \cdot \dots \cdot \cos^{n-1}(n-1)x \cdot (1 + \cos^n nx - 1)]}{x^2},$$

$$x_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x \cdot \cos^2 2x \cdot \dots \cdot \cos^{n-1}(n-1)x) + \cos x \cdot \cos^2 2x \cdot \dots \cdot \cos^{n-1}(n-1)x \cdot (1 - \cos^n nx)}{x^2} \dots (1p)$$

$$\text{Obținem } x_n = x_{n-1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cos^2 2x \cdot \dots \cdot \cos^{n-1}(n-1)x \cdot (1 - \cos^n nx)}{x^2} = \dots (1p)$$

$$x_{n-1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cos^2 2x \cdot \dots \cdot \cos^{n-1}(n-1)x \cdot (1 - \cos(nx))(1 + \cos(nx) + \cos^2(nx) + \dots + \cos^{n-1}(nx))}{x^2} = \dots (1p)$$

$$x_{n-1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(\frac{nx}{2}) \cdot n}{x^2} = x_{n-1} + 2 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 \cdot n = x_{n-1} + \frac{n^3}{2}.$$

$$\text{Obținem } x_n = x_{n-1} + \frac{n^3 - 1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{2} = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{8} \dots (1p)$$

4.

Presupunem că matricea A este inversabilă și fie A^{-1} inversa matricei A .

Din $A \cdot B - B \cdot A = A$ obținem prin înmulțire la stanga și la dreapta

$$A^{-1} \cdot A \cdot B - A^{-1} \cdot B \cdot A = A^{-1} \cdot A$$

$$A \cdot B \cdot A^{-1} - B \cdot A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1}$$

..... (3p)

$$\text{Rezultă } B - A^{-1} \cdot B \cdot A = I_3$$

$$A \cdot B \cdot A^{-1} - B = I_3, \text{ prin adunare se obține } A \cdot B \cdot A^{-1} - A^{-1} \cdot B \cdot A = 2I_3 \dots (1p)$$

$$\text{Rezultă } \text{Tr}(A \cdot B \cdot A^{-1} - A^{-1} \cdot B \cdot A) = \text{Tr}(2I_3). \dots (1p)$$

$$\text{Rezultă } \text{Tr}(A \cdot B \cdot A^{-1}) - \text{Tr}(A^{-1} \cdot B \cdot A) = 6 \dots (1p)$$

Din propr. $\text{Tr}(A \cdot B \cdot A^{-1}) = \text{Tr}(A^{-1} \cdot B \cdot A)$ obținem $0=6$, deci presupunerea este falsă

Matricea A nu este inversabilă. (1p)